ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01A879D600D9AF499849437C15CA3967FA
Владелец: Новикова Варвара Валентиновна
Действителен: с 03.04.2023 до 03.07.2024

Профессиональное образовательное частное учреждение среднего профессионального образования
«Высший юридический колледж:
экономика, финансы, служба безопасности»
Пушкинская ул., д. 268, 426008, г. Ижевск. Тел.: (3412) 32-02-32. Тел./факс: 43-62-22. E-mail:mveu@mveu.ru, mveu.ru

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И МЕТОДИЧЕСКОМУ СОПРОВОЖДЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

по специальности СПО

20.02.04 «Пожарная безопасность»

по дисциплине «ЕН.01 Математика»

Ижевск 2020 г.

Организация разработчик:
ПОЧУ СПО «Высший юридический колледж: экономика, финансы, служба безопасности»

Пояснительная записка

Очная форма обучения предполагает самостоятельную работу студента над учебным материалом: чтение учебников, решение задач, выполнение контрольных заданий. Однако, в случае возникновения затруднений при самостоятельном изучении материала, студент может обратиться к преподавателю математики для получения устной консультации.

При выполнении самостоятельной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1. Самостоятельная работа выполняется в отдельной тетради в клетку, на титульном листе которой должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, курс, специальность.
2. Задачи следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях. Перед решением задачи надо полностью переписать ее условие.
3. Ход решения каждой задачи студент обязан оформить аккуратно, в полном соответствии с порядком решения типичной задачи, приведенной в данных методических указаниях.
4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба.
5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.
6. Самостоятельная работа выполняется самостоятельно.

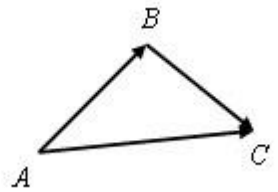
Самостоятельная работа

Теоретический материал

1.Операции над геометрическими векторами.

Вектором, или геометрическим вектором, $\overline{a}$ называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и направление. О всяком отрезке $\overline{AB}$ из этого множества говорят, что он представляет вектор $\overline{a}$ (получен приложением вектора $\overline{a}$ к точке A). Длина отрезка $\overline{AB}$ называется длиной (модулем) вектора, и обозначается символом $|\overline{a}|=|\overline{AB}|$. Вектор нулевой длины называется нулевым вектором и обозначается символом $\overline{0}$.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются равными ($\overline{a}=\overline{b}$) если множества представляющих их направленных отрезков совпадают.



Пусть направленный отрезок $\overline{AB}$ представляет вектор $\overline{a}$.Приложив к точке B заданный вектор $\overline{b}$, получим некоторый направленный отрезок $\overline{BC}$. Вектор, представляемый направленным отрезком $\overline{AC}$, называется суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и обозначается $\overline{a+b}$.

Произведением вектора $\overline{a}$ на действительное число λ называется вектор, обознача

емый $\overline{\lambda a}$, такой, что:

1) $|\overline{\lambda a}|=|\lambda|\cdot|\overline{a}|$;

2) векторы $\overline{a}$ и $\overline{\lambda a}$ сонаправлены при $\lambda>0$ и противоположно направлены при $\lambda<0$.

Примеры.

2.4.

Даны вектора a_1 и a_2. Построить:

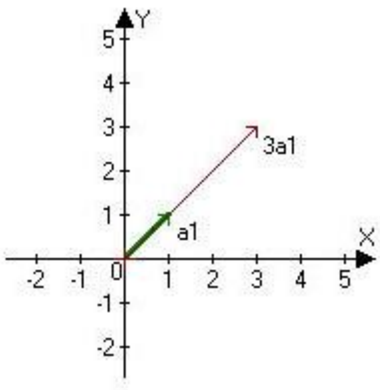
а) $3a_1$;

б) $1/2a_2$;

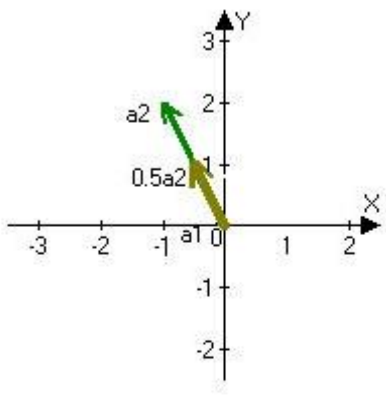
в) a_1+2a_2;

г) $1/2a_1-a_2$.

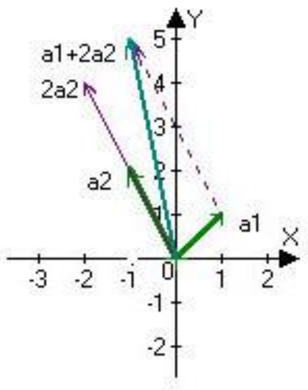
Решение.



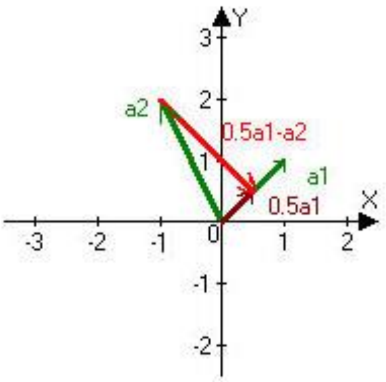
а) $|3\overline{a_1}|=3|\overline{a_1}|$; направление векторов $3\overline{a_1}$ и $\overline{a_1}$ совпадают.



б) $|0.5\overline{a_2}|=0.5|\overline{a_2}|$; направление векторов $0.5\overline{a_2}$ и $\overline{a_2}$ совпадают.

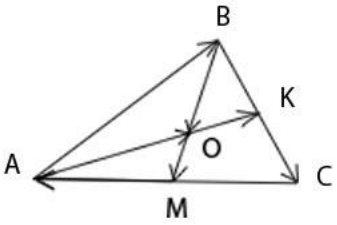


в) Вначале построим вектор $2\overline{a_2}$: Вектор $2\overline{a_2}$ направлен так же как $\overline{a_2}$ и $|2\overline{a_2}|=2|\overline{a_2}|$.
Вектор $\overline{a_1+2a_2}$; можно построить как диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a_1}$ и $2\overline{a_2}$.



г) Вначале построим вектор $0.5\overline{a_1}$: $|0.5\overline{a_1}|=0.5|\overline{a_1}|$;направление векторов $0.5\overline{a_1}$ и $\overline{a_1}$1 совпадают.
Вектор $\overline{0.5a_1-a_2}$ - это такой вектор, который в сумме с $\overline{a_2}$ даст $1/2\overline{a_1}$.

2.8.
$\overline{AK}$ и $\overline{BM}$ - медианы треугольника ABC. Выразить через $p=\overline{AK}$ и $q=\overline{BM}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$.
Решение.



Известно, что медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1 считая от вершины. Поэтому $|\overline{AO}|=\frac{2}{3}|\overline{AK}|$. Так как направление векторов $\overline{AO}$ и $\overline{AK}$ совпадает, то $\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AK}$.

Аналогично, $\overline{BO}=\frac{2}{3}\overline{BM}$.

Из треугольника AOB имеем

$$\overline{AB}=\overline{AO}+\overline{OB}=\overline{AO}-\overline{BO}=\frac{2}{3}(\overline{AK}-\overline{BM})=\frac{2}{3}(p-q).$$

Далее, из треугольника ABK найдем BK:

$$\overline{BK}=\overline{BA}+\overline{AK}=-\overline{AB}+\overline{AK}=-\frac{2}{3}(p-q)+p=\frac{1}{3}p+\frac{2}{3}q.$$

$$\overline{BC}=2\overline{BK}=\frac{2}{3}p+\frac{4}{3}q.$$

Из треугольника ABC имеем

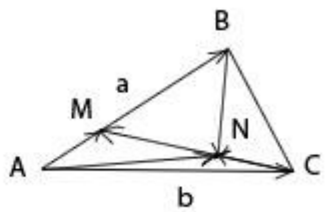
$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\frac{2}{3}(p-q)+\frac{2}{3}p+\frac{4}{3}q=\frac{4}{3}p+\frac{2}{3}q\Rightarrow\overline{CA}=-\overline{AC}=-\frac{4}{3}p-\frac{2}{3}q.$$

Ответ: $\overline{AB}=\frac{2}{3}(p-q)$; $\overline{BC}=\frac{2}{3}p+\frac{4}{3}q$; $\overline{CA}=-\frac{4}{3}p-\frac{2}{3}q$.

2.10.

В треугольнике ABC $\overline{AM}=\alpha\overline{AB}$ и $\overline{CN}=\beta\overline{CM}$. Полагая $\overline{AB}=a$ и $\overline{AC}=b$ выразить $\overline{AN}$ и $\overline{BN}$ через векторы a и b.

Решение.



Так как $\overline{AM}=\alpha\overline{AB}$, а $\overline{AB}=a$, то $\overline{AM}=\alpha a$.

Из треугольника AMC имеем

$$\overline{CM}=\overline{CA}+\overline{AM}=-\overline{AC}+\overline{AM}=-b+\alpha a.$$

По условию $\overline{CN}=\beta\overline{CM}$. Следовательно, $\overline{CN}=\beta(-b+\alpha a)$.

Из треугольника ANC имеем

$$\overline{AN}=\overline{AC}+\overline{CN}=b+\beta(-b+\alpha a)=b(1-\beta)+\alpha\beta a.$$

Из треугольника ABN имеем

$$\overline{BN}=\overline{BA}+\overline{AN}=-\overline{AB}+\overline{AN}=-a+b(1-\beta)+\alpha\beta a=b(1-\beta)+a(\alpha\beta-1).$$

Ответ: $\overline{AN}=\alpha\beta a+b(1-\beta)$; $\overline{BN}=a(\alpha\beta$

2.Предел функции

Вычисление предела функции. Пусть функция y=f(x) имеет своим пределом число A: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$=A, причем f(x) изменяется в зависимости от изменения переменной x. Необходимо учитывать, что при неограниченном стремлении переменной x к числу a (x→a) само число a исключается из значений, принимаемых переменной x. Дадим определение предела функции в точке.

Число A называется пределом функции f(x) в точке x_0 и обозначается $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$=A, если для любого числа ε >0 существует число δ>0 такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-x_0|$<δ, где $x\neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

При вычислении пределы функции используются теоремы, которые формулируются без доказательств.

Теорема 1

Если существуют пределы функций f(x) и φ(x) при x→a, то существует также и предел их суммы, равный сумме пределов функций f(x) и φ(x):

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+\varphi(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a}\varphi(x)$$

Теорема 2

Если существуют пределы функций f(x) и φ(x) при x→a, то существует также и предел их произведения, равный произведению пределов функций f(x) и φ(x):

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x)$$

Теорема 3

Если существуют пределы функций f(x) и φ(x) при x→a, предел функции φ(x) отличен от нуля, то существует также предел отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, равный отношению пределов функций f(x) и φ(x):

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x\to a}\left(kf(x)\right)=k\lim_{x\to a} f(x).$$

Следствие 2. Если n – натуральное число, то справедливы соотношения:

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n, \ \lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

Следствие 3. Предел многочлена (целой рациональной функции)

$$F(x)=a_1x^{n-1}+ a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_n$$

при x→аравен значению этого многочлена при x=a, т.е.

$$F(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m}$$

при x→c равен значению этой функции при x=c, если c принадлежит области определения этой функции, т.е.

$$\lim_{x \to c} F(x) = F(c).$$

3. Правила раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$

Правило раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть неопределенность $\frac{0}{0}$ надо числитель и знаменатель дроби разложить на множители так, чтобы можно было сократить.

Правило раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ надо числитель и знаменатель дроби сократить на самую большую степень x в знаменателе.

4. Определение производной функции.

Производной функции y=f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Основные правила дифференцирования. Обозначим через C постоянную, x – аргумент, u, υ, w – функции от x, имеющие производные.

Производная алгебраической суммы функций: $(u + \upsilon - w)' = u' + \upsilon' - w'$

Производная произведения двух функций: $(u\upsilon)' = u'\upsilon + \upsilon'u$

Производная произведения постоянной на функцию: $(Cu)' = Cu'$

Производная частного (дроби): $\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u'\upsilon - \upsilon'u}{\upsilon^2}$

Частные случаи: $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u'$; $\left(\frac{C}{\upsilon}\right)' = -\frac{C}{\upsilon^2}\upsilon'$.

Сложная функция. Производная сложной функции. Если y есть функция от u: y = f(u), где u, в свою очередь, есть функция от аргумента x: u = φ(x), т. е. если y зависит от x через промежуточный аргумент u, то y называется сложной функцией от x (функцией от функции): $y = f[\varphi(x)]$

Производная сложной функции равна ее производной по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

или $$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$$

Формулы дифференцирования

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$

$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

$(\lg u)' = \frac{0{,}4343}{u} \cdot u'$

$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$

$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$

$(e^u)' = e^u \cdot u'$

Производные тригонометрических функций

$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

Производные обратных тригонометрических функций

$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \quad (|u| < 1)$

$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \quad (|u| < 1)$

$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

5. Геометрический смысл производной функции

На линии, заданной уравнением y = f (x), возьмем фиксированную точку $M_0(x_0; y_0)$ и произвольную точку $M(x; y)$. Проведем секущую $M_0 M$ и через α обозначим угол, образованный этой секущей с положительным направлением оси x (рис. 1). При стремлении точки М по линии $y = f(x)$ к точке M_0 секущая $M_0 M$ стремится занять положение прямой M_0K, а угол а стремится стать равным углу φ. Здесь

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где $\Delta y = f(x) - f(x_0)$; $\Delta x = x - x_0$, а $\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0}$

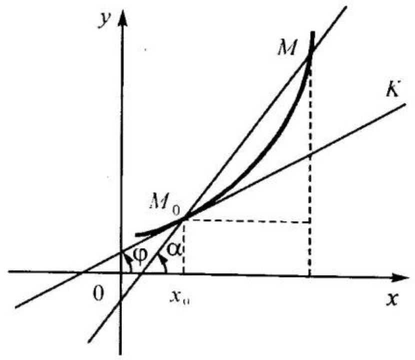


Рис. 1

Определение Касательной к линии в данной ее точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M при стремлении точки M по линии к точке M_0.

Угловым коэффициентом k прямой (в частности, касательной) называется тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси x.

Если $\Delta x \to 0$, то tg $\alpha \to$ tg φ, поэтому $k = tg\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$

6. Физический смысл производной функции

Пусть точка M перемещается по прямой и известен закон движения этой точки: S=f(t), где S – путь, t – время. Требуется найти истинную скорость движения в момент времени t.

$$\underline{S_0 \qquad\qquad S_0+\Delta S \qquad\qquad S} \rightarrow$$
$$t_0 \qquad\qquad t_0+\Delta t \qquad\qquad t$$

Для равномерного движения (т.е движения с постоянной скоростью) скорость – это путь деленный на время.

У нас движение, вообще говоря, неравномерное. Рассмотрим «соседний» момент времени $t_0+\Delta t$. За время Δt точка проделала путь $\Delta S=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$. Средняя скорость на этом промежутке $V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Т.к. Δt и ΔS – малые величины, то можно считать, что $V_{ср}=(V_{ист})t-t_0$. Чтобы это приближенное равенство стало точным, надо перейти к пределу при $\Delta t \to 0$:

$$V_{ucm} = \lim_{\Delta t \to 0} V_{cp} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0)\ .$$

Таким образом, если известен путь как функция времени, то производная пути по времени – это скорость движения. Это и есть физический смысл производной.

Аналогично, если известна скорость движения V=V(t), то ее производная – это ускорение (скорость изменения скорости). И вообще можно сказать, что производная функции в точке – это скорость изменения функции в этой точке.

7. Определение дифференциала функции

С понятием производной тесно связано понятие **дифференциала**. Чтобы выяснить сущность этого понятия, рассмотрим функцию y =f(x), заданную в интервале (a, b) и имеющую в некоторой точке x этого интервала производную y' = f′(x). Придадим x приращение Δx, отличное от нуля, но не выводящее из интервала задания функции. Через Δy обозначим соответствующее приращение функции. Так как отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при стремлении Δх к нулю стремится к производной у', а разность между переменной, имеющей предел, и этим пределом есть величина бесконечно малая, то величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - у' стремится к нулю вместе с Δх. Предыдущее равенство можно записать в форме Δу= у' Δх+α Δх, где α – стремится к нулю вместе с Δх.

Обозначив αΔх=β , мы видим, что при бесконечно малом Δх переменная β также есть бесконечно малая величина и притом стремящаяся к нулю быстрее, чем Δх, так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\beta}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{x \to 0}{}' \alpha = 0 .$$

Вообще, если две бесконечно малые величины ρ и σ связаны между собой условием $\lim \frac{\rho}{\sigma} = 0$, то говорят, что ρ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем σ.

Таким образом, величина β есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δх. Это означает, что при весьма малых Δх величина β во много раз меньше, чем Δх. Доказательство этого факта имеется во многих руководствах по математическому анализу, но оно выходит за рамки нашей программы.

Таким образом, при малых Δх величиной β = α Δх часто пренебрегают и довольствуются приближенной формулой

Δу=f '(х) Δх.

Определение. Дифференциалом или главной частью приращения функции у=f(х) в точке х, соответствующим приращению Δх, называется произведение производной f '(х), вычисленной в точке х, на Δх.

Дифференциал функции у =f(х) обозначается через dy или df(x). Таким образом,

dy = у 'Δх или df(x) =f '(х) Δх.

Из определения дифференциала следует, что он является функцией двух независимых переменных — точки х и приращения Δх.

Одним из основных свойств дифференциала, которое имеет широкое применение на практике — это то, что, пренебрегая бесконечно малыми более высокого порядка, можно приближенно заменять Δу — приращение функции ее дифференциалом dy.

8. Определение первообразной функции

Функция F(x) называется первообразной для функции f(x), если выполняется равенство F´(x)=f(x).

Например:

1) f(x)=3x^2; F(x)=x^3; т.к (x^3)´=3x^2;
2) f(x)=cosx; F(x)=sinx, т.к (sinx)´=cosx.

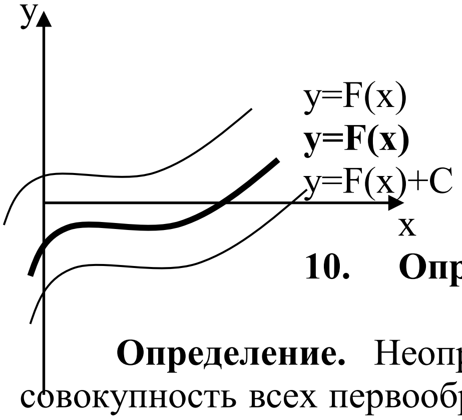
8. Теорема о существовании бесконечного множества первообразных

Теорема. Если функция f(x) имеет первообразную, то она имеет бесконечное множество первообразных F(x)+C, C=const.

Например: f(x)=$5x^4$; F(x)=x^5, т.к $(x^5)'=5x^4$; F(x)=x^5+11; F(x)=x^5-22

9. Геометрическое изображение первообразной

С геометрической точки зрения графики первообразной можно получить друг из друга параллельным переносом вдоль оси Оу.



10. Определение неопределенного интеграла

Определение. Неопределенным интегралом от функции f(x) называется совокупность всех первообразных вида F(x)+C и обозначается $F(x)+C=\int f(x)dx$, где f(x) – подинтегральная функция, f(x)dx – подинтегральное выражение.

Например: $\int 3x^2dx = x^3 + C$.

Определение. Процесс нахождения первообразной называется **интегрированием**.

Интегрирование – это действие обратное дифференцированию.

11. Свойства неопределенного интеграла

Свойства интеграла:

1) $\int(f(x)+\varphi(x))dx=\int f(x)dx+f\varphi(x)dx$ (Интеграл суммы равен сумме интегралов);

2) $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$ (Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла);

3) $\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C$ (Интеграл от сложной функции).

12. Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$
2. $\int kdx = kx + C$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
8. $\int e^x dx = e^x + C$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$
12. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C = -arcctgx + C$

13. Определение определенного интеграла

Определение. Определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a, b] называется предел ее интегральной суммы (если он существует).

$$\int_a^b (x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Здесь: f(x) – подинтегральная функция;
f(x)dx – подинтегральное выражение;
a, b – пределы интегрирования: «a» - нижний, «b» - верхний.

Из формулы следует, что $\int_a^b f(x)dx = S$

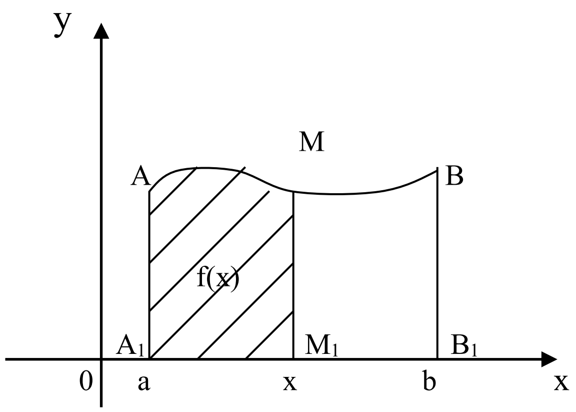
Это равенство выражает геометрический смысл определенного интеграла: определенный интеграл есть площадь криволинейной трапеции.

Вопрос о существовании интеграла, на первый взгляд, далеко не праздный: ведь есть множество способов разбиения отрезка [a, b] на части, есть множество способов выбирать точки ε_i и при этом будут получаться различные суммы. А вот пределы этих разных сумм должны быть одинаковыми – площадь-то одна!

И вообще имеет место **теорема о существовании определенного интеграла**: если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то определенный интеграл от нее на отрезке [a, b] существует и имеет единственное значение, не зависящее ни от разбиения отрезка [a, b] на части, ни от выбора точек.

14. Формула Ньютона-Лейбница

Чтобы получить формулу для вычисления определенного интеграла, еще раз поставим задачу о вычислении площади криволинейной трапеции.



Рассмотрим криволинейную трапецию A_1ABB_1. Возьмем некоторое значение x€[a, b]. Ясно, что площадь криволинейной трапеции A_1AMM_1 (заштрихованная на чертеже) зависит «x», т.е является функцией x. Обозначим эту функцию S(x). Очевидно, что S(a)=0, S(b)=S – площадь всей данной криволинейной трапеции.
Можно доказать (мы это делать не будем), что функция S(x) является первообразной для функции f(x), т.е S´(x)=f(x)/

Пусть теперь F(x) тоже какая-нибудь первообразная для f(x), например $F(x) = \int f(x)dx$. Но тогда по свойству первообразных S(x)=F(x)+C.

При x=a получим: S(a)=F(a)+C или 0=F(a)+C

Jnrelf C= - F(a)

Значит S(x)=F(x)-F(a). Положим здесь x=b: S(b)=F(b)-F(a) или S=F(b)-F(a), но $S=\int_a^b f(x)dx$ следовательно $S=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Это и есть формула Ньютона-Лейбница. Она говорит, что для вычисления определенного интеграла надо сначала найти функцию F(x) первообразную для подинтегральной функции; затем в нее подставить пределы интегрирования (верхний и нижний) и затем найти разность F(b)-F(a). Поэтому иногда формулу Ньютона-Лейбница записывают подробнее:

$$\int_b^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

15. Определение криволинейной трапеции

16. Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается в следующем виде:

F(x, y, y') = 0,

F(x, У, У") = 0,

$F(x,y,y',y'',\dots,y^n)=0.$

Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или интегралом) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением (или общим интегралом) дифференциальнойго уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения называете решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

График частного решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой. Общему решению дифференциального уравнения соответствует совокупность (семейство) всех интегральных кривых.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y)$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx$$

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y + \varphi(x) = 0$$

где f(x) и φ(x) — функции от x, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. В частном случае f(x) и φ(x) могут быть постоянными величинами. Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки y = uz, где u и z — новые функции от x.

17. Основы теории комплексных чисел

Основные понятия теории комплексных чисел.

Комплексным числом z называется число вида $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, i – так называемая *мнимая единица*. Число a называется *действительной частью* комплексного числа z, число b называется *мнимой частью* комплексного числа z.

$a + bi$ – это ЕДИНОЕ ЧИСЛО, а не сложение. Действительную и мнимую части комплексного числа, в принципе, можно переставить местами: $z = bi + a$ или переставить мнимую единицу: $z = a + ib$ – от этого комплексное число не изменится. **Но стандартно комплексное число принято записывать именно в таком порядке**: $z = a + bi$

Сложение комплексных чисел

Пример 1:

Сложить два комплексных числа $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 4 - 5i$

Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части: $z_1 + z_2 = 1 + 3i + 4 - 5i = 5 - 2i$

Действие настолько очевидно, что не нуждается в дополнительных комментариях.

Таким нехитрым способом можно найти сумму любого количества слагаемых: просуммировать действительные части и просуммировать мнимые части.

Для комплексных чисел справедливо правило первого класса: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – от перестановки слагаемых сумма не меняется.

Вычитание комплексных чисел

Пример 2:

Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, если $z_1 = -2 + i$ $z_2 = \sqrt{3} + 5i$

Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:

$$z_1 - z_2 = -2 + i - (\sqrt{3} + 5i) = -2 + i - \sqrt{3} - 5i = -2 - \sqrt{3} - 4i$$

Результат не должен смущать, у полученного числа две, а не три части. Просто действительная часть – составная: $-2-\sqrt{3}$. Для наглядности ответ можно переписать так: $z_1 - z_2 = (-2 - \sqrt{3}) - 4i$.

Рассчитаем вторую разность: $z_2 - z_1 = \sqrt{3} + 5i - (-2 + i) = \sqrt{3} + 5i + 2 - i = 2 + \sqrt{3} + 4i$

Здесь действительная часть тоже составная: $2+\sqrt{3}$

Чтобы не было какой-то недосказанности, приведу короткий пример с «нехорошей» мнимой частью: $-1+\sqrt{2}i + 7 - 3i = 6 + (\sqrt{2} - 3)i$. Вот здесь без скобок уже не обойтись.

Умножение комплексных чисел

Настал момент познакомить вас со знаменитым равенством:

$$i^2 = -1$$

<u>Пример 3:</u>

Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 6i$

Очевидно, что произведение следует записать так: $z_1 \cdot z_2 = (1-i)(3+6i)$

Что напрашивается? Напрашивается раскрыть скобки по правилу умножения многочленов. Так и нужно сделать! Все алгебраические действия вам знакомы, главное, помнить, что $i^2 = -1$ **и быть внимательным**.

Повторим школьное правило умножения многочленов: Чтобы умножить многочлен на многочлен нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена.

Я распишу подробно: $z_1 \cdot z_2 = (1-i)(3+6i) = 1 \cdot 3 - i \cdot 3 + 1 \cdot 6i - i \cdot 6i = 3 - 3i + 6i + 6 = 9 + 3i$

Надеюсь, всем было понятно, что $-i \cdot 6i = -6i^2 = -6 \cdot (-1) = +6$

Внимание, и еще раз внимание, чаще всего ошибку допускают в знаках.

Как и сумма, произведение комплексных чисел перестановочно, то есть справедливо равенство: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Деление комплексных чисел

<u>Пример 4:</u>

Даны комплексные числа $z_1 = 13+i$, $z_2 = 7-6i$. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.

Составим частное: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{13+i}{7-6i}$

Деление чисел осуществляется **методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение**.

Вспоминаем формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ и смотрим на наш знаменатель: $7-6i$. В знаменателе уже есть $(a-b)$, поэтому сопряженным выражением в данном случае является $(a+b)$, то есть $7+6i$

Согласно правилу, знаменатель нужно умножить на $7+6i$, и, чтобы ничего не изменилось, домножить числитель на то же самое число $7+6i$: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}$

Далее в числителе нужно раскрыть скобки (перемножить два числа по правилу, рассмотренному в предыдущем пункте). А в знаменателе воспользоваться формулой $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ (помним, что $i^2 = -1$ и не путаемся в знаках!!!).

Распишу подробно:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)} = \frac{91+7i+78i+6i^2}{7^2-(6i)^2} = \frac{91+7i+78i-6}{49-(-36)} =$$

$$= \frac{85+85i}{49+36} = \frac{85+85i}{85} = 1+i$$

Пример подобран «хороший», если взять два произвольных числа, то в результате деления почти всегда получатся дроби, что-нибудь вроде $\frac{53}{13} - \frac{4}{13}i$.

Комплексные числа в экономике

Сегодня сложно представить себе ряд наук без применения комплексных чисел. Теория электротехники, электромеханики, радиотехники, самолетостроения и других наук невозможна без применения моделей в виде комплексных чисел. Экономика, более сложная наука, до сих пор не знала применения комплексных чисел.

Товар является носителем двух составляющих: потребительских свойств, объективно присущих товару, и цены - денежной оценки потребительских свойств товара конкретным потребителем. С учетом того, что и потребительские свойства товара и его цена являются необходимыми показателями свойств товара, возникает потребность разработки и использования комплексного показателя, характеризующего эти две стороны одного объекта. Именно таким показателем может стать комплексное число, состоящее из действительной и мнимой частей.

Представив какую-либо оценку потребительских свойств товара П как действительную часть комплексного числа, а его цену Ц - как мнимую часть, получим:
Т = П + iЦ, (1)
где i - мнимая единица, которая определяется условием i? (0, 1) и удовлетворяет соотношению:
$i^2 = -1$. (2)

Легко убедиться в том, что запись (1) позволяет полностью описать свойства конкретного товара и математически корректно работать как с каждой из двух его составляющих, так и с их совокупностью в целом.

18. Элементы теории вероятностей и математической статистики
Случайные события и их вероятности.
Применение комбинаторики к подсчету вероятности.

Пример 1:
В партии из **N** деталей имеется **n** бракованных. **Какова вероятность** того, что среди наудачу отобранных **k** деталей окажется **s** бракованных?
Решение.
Количество всех элементарных исходов равно C_N^k. Для подсчета числа благоприятных случаев рассуждаем так: из **n** бракованных можно выбрать **s** деталей C_n^s способами, а из **N – n** небракованных можно выбрать **k – s** небракованных деталей C_{N-n}^{k-s} способами; по правилу произведения число благоприятных случаев равно $C_n^s C_{N-n}^{k-s}$. Искомая вероятность равна:

$$p = \frac{C_n^s C_{N-n}^{k-s}}{C_N^k} \qquad (1)$$

Замечание:
Всякое **k-членное подмножество n-членного множества** называется **сочетанием из n элементов по k.**
Число различных **сочетаний из n элементов по k** обозначается C_n^k .
Справедлива формула

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad (2)$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

Пример 2:

В партии из 12 деталей имеется 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наугад деталей 4 стандартных.
Решение.
Искомую вероятность найдем по формуле (1) для случая
N =12, n =7, k = 6, s = 4.

$$p=\frac{C_7^4C_{12-7}^{7-4}}{C_{12}^6}=\frac{C_7^4C_5^3}{C_{12}^6}=\frac{\frac{7!}{4!(7-4)!}\cdot\frac{5!}{3!(5-3)!}}{\frac{12!}{6!(12-6)!}}=\frac{\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2}}{\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}}=\frac{25}{66}.$$

Элементы линейной алгебры.

Матрицы.

Матрица – это прямоугольная таблица каких-либо **элементов**. В качестве **элементов** мы будем рассматривать числа, то есть числовые матрицы. **ЭЛЕМЕНТ** – это термин. Термин желательно запомнить, он будет часто встречаться, не случайно я использовал для его выделения жирный шрифт.

Обозначение: матрицы обычно обозначают прописными латинскими буквами $A, B, C, \ldots$

Пример: рассмотрим матрицу «два на три»:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -17\\ -1 & 0 & 10\end{pmatrix}$$

Данная матрица состоит из шести **элементов**:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -17\\ -1 & 0 & 10\end{pmatrix}$$

Все числа (элементы) внутри матрицы существуют сами по себе, то есть ни о каком вычитании речи не идет:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -17\\ -1 & 0 & 10\end{pmatrix}$$

Это просто таблица (набор) чисел!

Рассматриваемая матрица имеет две строки:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -17\\ -1 & 0 & 10\end{pmatrix}$$

и три столбца:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -17\\ -1 & 0 & 10\end{pmatrix}$$

СТАНДАРТ: когда говорят о размерах матрицы, то **сначала** указывают количество строк, а только потом – количество столбцов. Мы только что разобрали матрицу «два на три».

Если количество строк и столбцов матрицы совпадает, то матрицу называют **квадратной**, например: $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 4 & -7\\ 6 & -4 & -6\end{pmatrix}$ – матрица «три на три».

Если в матрице один столбец $C=\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$ или одна строка $D=\begin{pmatrix}7 & 3 & -12 & 0 & 34\end{pmatrix}$, то такие матрицы также называют **векторами**.

Действия с матрицами:

1) Умножение матрицы на число.

<u>Пример:</u>

$$3\cdot\begin{pmatrix}12 & -1\\7 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 12 & 3\cdot(-1)\\3\cdot 7 & 3\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36 & -3\\21 & 0\end{pmatrix}$$

Для того чтобы умножить матрицу на число, нужно **каждый** элемент матрицы умножить на данное число. В данном случае – на тройку.

2) Сумма (разность) матриц.

Сумма матриц действие несложное.
НЕ ВСЕ МАТРИЦЫ МОЖНО СКЛАДЫВАТЬ. Для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были ОДИНАКОВЫМИ ПО РАЗМЕРУ.

Например, если дана матрица «два на два», то ее можно складывать только с матрицей «два на два» и никакой другой!

$$\xcancel{\begin{pmatrix}12 & -1\\7 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\-5 & 4 & -7\\6 & -4 & -6\end{pmatrix}}$$

<u>Пример:</u>

Сложить матрицы $F=\begin{pmatrix}12 & -1\\-5 & 0\end{pmatrix}$ и $G=\begin{pmatrix}-4 & -3\\15 & 7\end{pmatrix}$

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:

$$F+G=\begin{pmatrix}12 & -1\\-5 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & -3\\15 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12+(-4) & -1+(-3)\\-5+15 & 0+7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12-4 & -1-3)\\-5+15 & 0+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -4\\10 & 7\end{pmatrix}$$

Для разности матриц правило аналогичное, **необходимо найти разность соответствующих элементов**.

<u>Пример:</u>

Найти разность матриц $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -17\\-1 & 0 & 10\end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix}-4 & 3 & -15\\-5 & -7 & 0\end{pmatrix}$

$$A-H=\begin{pmatrix}3 & 5 & -17\\ -1 & 0 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & 3 & -15\\ -5 & -7 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-(-4) & 5-3 & -17-(-15)\\ -1-(-5) & 0-(-7) & 10-0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3+4 & 5-3 & -17+15\\ -1+5 & 0+7 & 10-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 2 & -2\\ 4 & 7 & 10\end{pmatrix}$$

3) Умножение матриц.

Какие матрицы можно умножать?

Чтобы матрицу K можно было умножить на матрицу L необходимо, **чтобы число столбцов матрицы K равнялось числу строк матрицы L.**

<u>Пример:</u>

Можно ли умножить матрицу $K=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}$ на матрицу $L=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$?

$$KL=\overbrace{\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}}^{\substack{m=2\\ \text{2 столбца}}}\cdot\left.\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}\right\}_{n=2\text{ строки}}$$

$m=n$, значит, умножать данные матрицы можно.

А вот если матрицы переставить местами, то, в данном случае, умножение уже невозможно!

$$LK=\overbrace{\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}}^{\substack{m=1\\ \text{столбец}}}\cdot\left.\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}\right\}_{n=2\text{ строки}}$$

$m\neq n$, следовательно, выполнить умножение невозможно, и вообще, такая запись **не имеет смысла** $\xcancel{\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}}$

Следует отметить, что в ряде случаев можно умножать матрицы и так, и так. Например, для матриц, $M=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}$ и $N=\begin{pmatrix}9 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$ возможно как умножение MN, так и умножение NM

Как умножить матрицы?

Начнем с самого простого:

<u>Пример:</u>

Умножить матрицу $K=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}$ на матрицу $L=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$

Сразу привожу формулу для каждого случая:

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 \end{pmatrix}$ – попытайтесь сразу уловить закономерность.

$$KL = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

<u>Пример сложнее:</u>

Умножить матрицу $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ на матрицу $N = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

Формула: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 & a_1d_1 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 & a_2d_1 + b_2d_2 \end{pmatrix}$

$$MN = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 & 2 \cdot (-6) - 3 \cdot (-4) \\ 4 \cdot 9 - 6 \cdot 6 & 4 \cdot (-6) - 6 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате получена так называемая нулевая матрица.

Попробуйте самостоятельно выполнить умножение NM (правильный ответ $\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$).

Обратите внимание, что $MN \neq NM$ **!** Таким образом, **переставлять матрицы в произведении нельзя!**

Если в задании предложено умножить матрицу M на матрицу N, то и умножать нужно именно в таком порядке. Ни в коем случае не наоборот.

<u>Переходим к матрицам третьего порядка:</u>

Умножить матрицу $P = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ на матрицу $R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Формула очень похожа на предыдущие формулы:
$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1d_1 + b_1d_2 + c_1d_3 \\ a_2d_1 + b_2d_2 + c_2d_3 \\ a_3d_1 + b_3d_2 + c_3d_3 \end{pmatrix}$

$$PR = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 8 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 + 9 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -20 \\ -16 \end{pmatrix}$$

А теперь попробуйте самостоятельно разобраться в умножении следующих матриц:

Умножьте матрицу $P = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ на матрицу $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Вот готовое решение, но постарайтесь сначала в него не заглядывать!

$$PS=\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5\cdot 3+8\cdot 4-4\cdot 9 & 5\cdot 2+8\cdot(-1)-4\cdot 6 & 5\cdot 5+8\cdot 3-4\cdot 5\\ 6\cdot 3+9\cdot 4-5\cdot 9 & 6\cdot 2+9\cdot(-1)-5\cdot 6 & 6\cdot 5+9\cdot 3-5\cdot 5\\ 4\cdot 3+7\cdot 4-3\cdot 9 & 4\cdot 2+7\cdot(-1)-3\cdot 6 & 4\cdot 5+7\cdot 3-3\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -22 & 29\\ 9 & -27 & 32\\ 13 & -17 & 26\end{pmatrix}$$

Применение линейной алгебры в экономике.

Использование элементов алгебры матриц является одним из основных методов решения многих **экономических задач**. Особенно этот вопрос стал актуальным при разработке и использовании баз данных: при работе с ними почти вся информация хранится и обрабатывается в матричной форме.

Задача:

Предприятие выпускает 4 вида изделий с использованием 4-х видов сырья. Нормы расхода сырья даны как элементы матрицы А:

$$\begin{array}{cccc} & \text{вид сырья} & & \\ & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\end{matrix} & & \\ A = & \begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 5 & 6\\ 7 & 2 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 6 & 8\end{pmatrix} & \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{matrix}\text{вид}\\ \text{изделия}\\ \downarrow\end{matrix}\end{array}$$

Требуется найти затраты сырья на каждый вид изделия при заданном плане их выпуска: соответственно 60, 50, 35 и 40 ед.

Решение. Составим вектор-план выпуска продукции

$$\bar{q}=(60,50,35,40).$$

Тогда решение задачи дается вектором затрат, координаты которого и являются величинами затрат сырья по каждому его виду; этот вектор затрат вычисляется как произведение вектора $\bar{q}$ на матрицу А:

$$\bar{q}A=(60,50,35,40)\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 5 & 6\\ 7 & 2 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 6 & 8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}120 & + & 50 & + & 245 & + & 160\\ 180 & + & 100 & + & 70 & + & 200\\ 240 & + & 250 & + & 105 & + & 240\\ 300 & + & 300 & + & 70 & + & 320\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}575\\ 550\\ 835\\ 990\end{pmatrix}.$$

Задание № 1

Построить на числовой оси точки $A(-5)$, $B(+4)$ и $C(-2)$ и найти величины AB, BC и AC отрезков на оси. Проверить, что $AB + BC = AC$.

Построить точку $C(2, 4)$.

Построить точку, симметричную точке $A(x, y)$ относительно: а) оси Ox, б) оси Oy, в) начала координат.

Какое соотношение существует между координатами точки, если она лежит: а) на биссектрисе первого и третьего координатных углов; б) на биссектрисе второго и четвертого координатных углов?

Доказать, что треугольник с вершинами $A(-3, -2)$, $B(0, -1)$ и $C(-2, 5)$ прямоугольный.

Точка $A(a, b)$ находится внутри первого координатного угла. Определить координаты точки B, симметричной с точкой A относительно биссектрисы этого координатного угла.

Точки $A(-4, 2)$ и $B(x, y)$ лежат на прямой, параллельной оси Ox, причем расстояние между ними равно 2 единицы масштаба. Определить координаты точки B.

Точки $A(5, 5)$ и $B(x, y)$ лежат на биссектрисе первого координатного угла. Расстояние между ними равно 4 единицы масштаба. Найти координаты точки B.

Найти расстояние между точками $A(4, -5)$ и $B(7, -1)$.

Под каким углом к положительному направлению оси Ox наклонен отрезок, соединяющий точки $A(-1, 3)$ и $B(7, -3)$?

Отрезок AB соединяет точки $A(-6, 7)$ и $B(1, -2)$. Определить длину этого отрезка и угол между ним и положительным направлением оси Ox.

Доказать, что треугольник, вершины которого $A(2, 3)$; $B(6, 7)$; $C(-7, 2)$, - тупоугольный.

Найти точку, удаленную на 5 единиц как от точки $A(2, 1)$, так и от оси Ox.

Задача

1. Даны вершины треугольника $A(-2,1)$,$B(3,3)$,С(1,0). Найти:

а) длину стороны AB;

б) уравнение медианы BM;

в) cos угла BCA;

г) уравнение высоты CD;

д) длину высоты СD;

е) площадь треугольника ABC.

Задача 2. Найти длину высоты AD в треугольнике с вершинами$A(3,2)$,$B(2,-5)$,$C(-6,-1)$ и написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AB.

Задача 3. Даны вершины $A(1,1)$,$B(7,5)$,$C(4,5)$ треугольника. Найти:

1) длину стороны AB;

2) внутренний угол A в радианах с точностью до 0,01;

3) уравнение высоты, проведенной через вершину C;

4) уравнение медианы, проведенной через вершину C;

5) точку пересечения высот треугольника;

6) длину высоты, опущенной из вершины C;

7) систему линейных неравенств, определяющую внутреннюю область треугольника.

Сделать чертеж.

Задача 4. Даны уравнения двух сторон треугольника $4x-5y+9=0$ и $x+4y-3=0$. Найти уравнение третьей стороны, если известно, что медианы этого треугольника пересекаются в точке $P(3,1)$.

Задача 5. Уравнение одной из сторон квадрата $x+3y-5=0$. Составить уравнения трех остальных сторон квадрата, если $(-1,0)$ – точка пересечения его диагоналей.

Задача 6. Даны две вершины $A(-3,3)$, $B(5,-1)$ и точка $D(4,3)$ пересечения высот треугольника. Составить уравнения его сторон.

В задачах 1-10 ответить письменно на теоретические вопросы.

1. Определение предела функции. Правила раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$.

2. Определение производной функции. Геометрический смысл производной функции.

3. Определение производной функции. Физический смысл производной функции.

4. Определение дифференциала функции. Определение дифференцирования. Правила дифференцирования.

5. Определение дифференцирования. Формулы дифференцирования.

6. Определение первообразной функции. Теорема о существовании бесконечного множества первообразных. Геометрическое изображение первообразных.

7. Определение неопределенного интеграла. Свойства интеграла. Таблица неопределенных интегралов.

8. Определение криволинейной трапеции. Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница.

9. Определение определенного интеграла. Свойства определенного интеграла.

10. Понятие о дифференциальных уравнениях. Определение дифференциального уравнения, порядок дифференциального уравнения, решение, общее решение, частное решение, интегральная кривая. Дифференциальное уравнение первого порядка.

Задание № 2

В задачах 11-20 вычислить пределы функции:

21. а) $\lim\limits_{x\to 2}$ (2x^2-3x+4);

б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2+5x-8}{11(1-x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2+4x+2}{x-2x^2+1}$;

22. а) $\lim\limits_{x\to 0}$ (3x^3+x^2+8x+10);

б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-8x+15}{2(x-5)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-3x^2+1}{x^3-4x^2+2x}$;

23. а) $\lim\limits_{x\to -1}$ (x^3-x^2+1);

б) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-7x+10}{3(x-5)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - x^3 + 1}{x^3 - 2x^4 + x^2}$;

24. а) $\lim\limits_{x\to 3}$ (2x²-8x+4);

б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2 - 8x + 4}{(x-2)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + 3x^4 + 2}{x - 2x^4 + 1}$;

25. а) $\lim\limits_{x\to -1}$ $(2x^2-4x+5)$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3(x-2)}{3x^2 - 8x + 4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 - 2x^2 + 4}{x^3 + 4x^2 + 2x}$;

26. а) $\lim\limits_{x\to 2}$ $(-3x^2+4x-8)$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4(1-x)}{3x^2 + 5x - 8}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4 - 3x + 4}{x^2 - 2x^4 + x^3}$;

27. а) $\lim\limits_{x\to 1}$ $(4x^4-5x^2+4)$;

б) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 9x + 20}{2x - 10}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + 4x^3 + 3}{x - 2x^3 + 1}$;

28. а) $\lim\limits_{x\to 0}$ $(4x^3-2x-1)$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x^2 - 14x + 8}{x - 2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - 5x - 4}{x^3 + 2x + 3}$;

29. а) $\lim\limits_{x\to 1}$ $(2x^2+4x)$;

б) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{3x^2 + 7x - 6}{x + 3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4 + x - 1}{3x^2 + 2x^4 - x}$;

30. а) $\lim\limits_{x\to -1}$ (x^3-x^2+1);

б) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+x-15}{x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+4x+2}{x-2x^3+1}$.

Решение типовых примеров

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-x^2+8)$.

В этом примере необходимо провести непосредственную подстановку.

$\lim\limits_{x\to 3}(4x-x^2+8)=4\cdot 3-3^2+8=12-9+8=11$

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2+x-10}{5x-10}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

Непосредственная подстановка приводит к неопределенности типа $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель на множители и сократим члены дроби на общий множитель (x-2).

Числитель: $2x^2+x-10=2(x-2)(x+\dfrac{5}{2})$

$2x^2+x-10=0$

$D=1-4\cdot 2(-10)=1+80=81$

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{81}}{2\times 2}=\dfrac{-1+9}{4}=\dfrac{8}{4}=2$

$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{81}}{2\times 2}=\dfrac{-1-9}{4}=-\dfrac{10}{4}=-\dfrac{5}{2}$

Используемые формулы:

– расположение квадратного трехчлена на множители $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

– $D=b^2-4ac$

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$; $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

Знаменатель: $5x-10=5(x-2)$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2+x-10}{5x-10}=\lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)(x+\frac{5}{2})}{5(x-2)}=\lim_{x\to 2} \frac{2x+5}{5}=\frac{2\times 2+5}{5}=\frac{9}{5}$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-2x^2+x-1}{5x^3+3x^2+10x+2}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$

В этом примере получается неопределенность вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, избавиться от которой можно вынесением за скобки в числителе и в знаменателе дроби старшей степени переменной:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+x-1}{5x^3+3x^2+10x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{x^3(5-\frac{3}{x}+\frac{10}{x^2}+\frac{2}{x^3})}=\frac{3}{5}$$

Задание № 3

В задачах 31-40 исследовать заданную функцию методами дифференциального исчисления и построить эскиз графика. Исследование функций рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) Найти область определения функции;
2) Найти производную функции;
3) Найти точки экстремума;
4) Определить промежутки монотонности функции;
5) Найти точки перегиба функции;
6) Определить промежутки выпуклости и вогнутости функции;
7) Найти значение функции в точках экстремума и перегиба;
8) Построить эскиз графика.

31. $y=2x^3-9x^2+12x-5$
32. $y=x^3-6x^2+9x+1$
33. $y=x^3-3x^2-9x+10$
34. $y=x^3+3x^2-9x-10$
35. $y=x^3+6x^2+9x+2$
36. $y=2x^3-3x^2-12x+5$
37. $y=2x^3+3x^2-12x-8$
38. $y=2x^3+9x^2+12x+7$
39. $y=2x^3-15x^2+36x-32$
40. $y=2x^3-15x^2+24x+4$

Решение типового примера

$y=x^3+9x^2+15x-9$

1) Областью определения данной функции является все действительные значения аргумента x, т.е $D(y)=R$

2) Найдем производную функции

$y' = 3x^2 + 18x + 15$

3) Найдем точки экстремума, для этого приравняем производную к нулю.

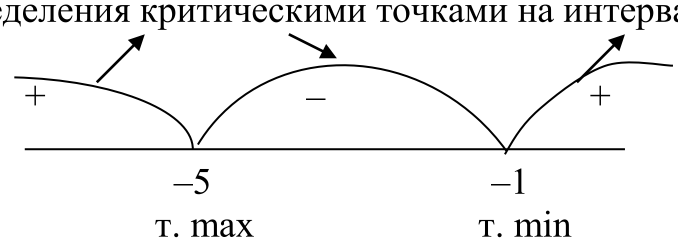
$3x^2 + 18x + 15 = 0$, :/3

$x^2 + 6x + 5 = 0$

$D = 36 - 4\cdot 5 = 16$; $x_1 = \frac{-6+\sqrt{16}}{2} = -1$; $x_2 = \frac{-6-\sqrt{16}}{2} = -5$

Значит функция имеет две критические точки $x_1=-1$, $x_2=-5$.

4) Найдем промежутки монотонности функции, для этого разбиваем область определения критическими точками на интервалы



Определим знак производной на каждом интервале:

$y'(0) = 3\cdot 0^2 + 18\cdot 0 + 15 = 15 > 0$, значит на интервале $(-1;+\infty)$ производная функции положительная, значение функции возрастает.

$y'(-2) = 3\cdot(-2)^2 + 18\cdot(-2) + 15 = -9 < 0$, на промежутке $(-5;-1)$ производная функции отрицательная, значения функции убывает.

$y'(-6) = 3\cdot(-6)^2 + 18\cdot(-6) + 15 = 30 > 0$, на промежутке $(-\infty;-5)$ производная функции положительная, значения функции возрастает.

Отсюда следует, что $x_1=-5$ – точка максимума (max), $x_2=-1$ – точка минимума (min).

5) Найдем точки перегиба функции, для этого найдем вторую производную функции и приравниваем ее к нулю:

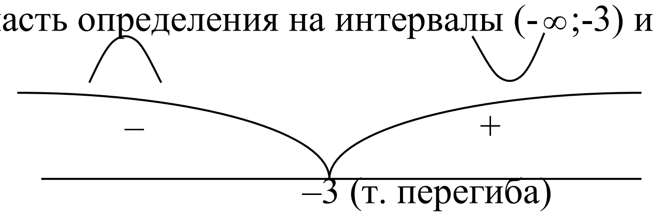
$y'' = 6x + 18$

$6x + 18 = 0$

$6x = -18$

$x = -3$ – критическая точка.

6) Определим промежутки выпуклости и вогнутости функции. Разобьем область определения на интервалы $(-\infty;-3)$ и $(-3;+\infty)$



Определим знак второй производной на каждом интервале:

$y''(0) = 6\cdot 0 + 18 = 18 > 0$;

$y'' = 6\cdot(-4) + 18 = -6 < 0$.

На промежутке $(-3;+\infty)$ – функция выпуклая; а на промежутке $(-\infty;-3)$ – функция вогнутая, значит $x=-3$ – точка перегиба.

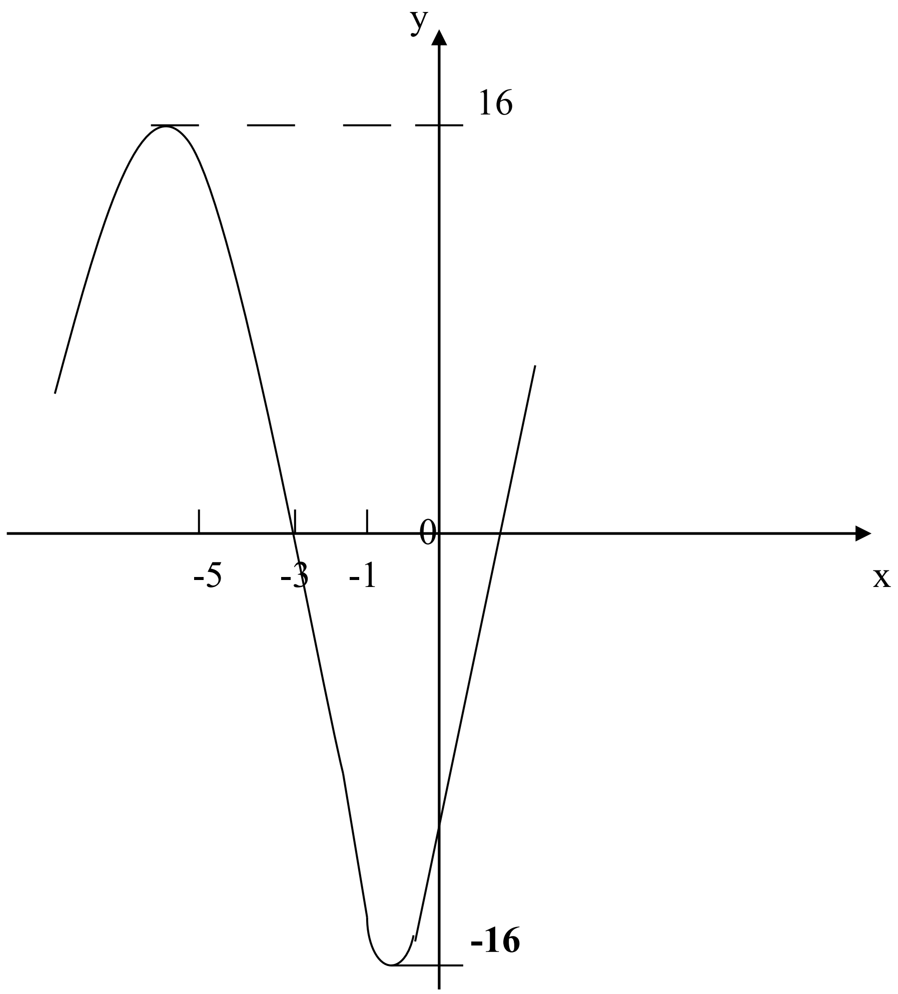
7) Найдем значение функции в точках в точках экстремума и перегиба

$y_{max} = y(-5) = ((-5)^3 + 9(-5)^2 + 15(-5) - 9) = 16$

y_{min}=y(-1)=((-1)^3+9(-1)^2+15(-1)-9)=-16

$y_{перегиба}$=y(-3)=((-3)^3+9(-3)^2+15(-3)-9)=0

8) Построим эскиз графика с учетом предыдущих исследований



Задание № 4

В задачах 41-50 вычислить неопределенные интегралы, результат проверить дифференцированием.

41. а) $\int (3x^{-4} + 8x^{-5})dx$;

б) $\int (7-6x)^3 dx$.

42. а) $\int (x^3 - 6x^5)dx$;

б) $\int (4+3x)^2 dx$.

43. а) $\int (2x^8 + 4x^{-2})dx$;

б) $\int \ln 3x \, dx$.

44. а) $\int (e^x - 2x)dx$;

б) $\int \cos 4x \, dx$.

45. а) $\int(3^x - e^x - 1)\ dx$;

б) $\int(\sin 3x)\ dx$.

46. а) $\int(\sin x - 5)\ dx$;

б) $\int \ln(x+3)\ dx$.

47. а) $\int(4 - 3\cos x)\ dx$;

б) $\int(5-4x)^4 dx$.

48. а) $\int(4^x - 2\sin x - x)\ dx$;

б) $\int \cos^2 x\ dx$.

49. а) $\int(4x^3 - 6x^2 + 4x - 3)\ dx$;

б) $\int \sin^2 x\ dx$.

50. а) $\int(x^{-4} - x^{-3} + 1)\ dx$;

б) $\int \ln(x-8)\ dx$.

Решение типового примера

1) Найти неопределенные интегралы, результат проверить дифференцированием.

а) $\int(2x^{-4} + 5x - 4\cos x)dx = \frac{2x^{-4+1}}{-4+1} + \frac{5x^{1+1}}{1+1} - 4\sin x + C = -\frac{2x^{-3}3}{} + \frac{5x^2}{2} - 4\sin x + C$

Проверка дифференцированием:

$(-\frac{2x^{-3}}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4\sin + C)' = -\frac{2}{3}(-3)x^{-4} + \frac{5}{2}2x - 4\cos = 2x^{-4} + 5x - 4\cos x$

б) $\int(8x-3)^3 dx$

Применим подстановку

$8x - 3 = t$

$8dx = dt$

$dx = \frac{dt}{8}$

$$\int(8x-3)^3 dx = \int t^3 \frac{dt}{8} = \frac{1}{8}\int t^3 dt = \frac{1}{8}\frac{t^4}{4} + C = \frac{t^4}{32} + C = \frac{(8x-3)^4}{32} + C$$

Проверка дифференцированием:

$$\left(\frac{(8x-3)^4}{32}+C\right)' = \frac{4(8x-3)^3(8x-3)'}{32} = \frac{(8x-3)^3 8}{8} = (8x-3)^3$$

Используемые формулы: $(x^n)' = nx^{n-1}$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(cU_x)' = cU_x'$$

$$\int x^n dx = \frac{x^n\ +1}{n+1} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Задание № 5

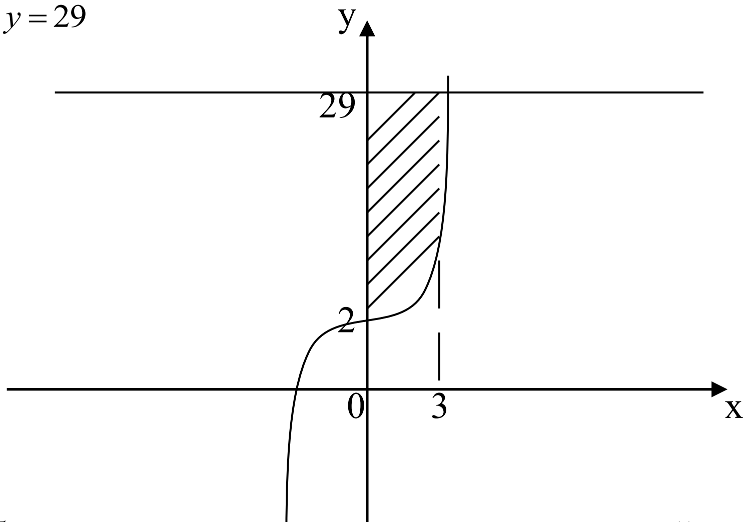
В задачах 51-60 вычислить площадь фигуры, ограниченную заданными линиями:

51. $y=x^2$, $y=49$.
52. $y=x^3$, $y=8$.
53. $y=x^2+1$, $x=-2$, $x=2$.
54. $y=x^2$, $y=64$.
55. $y=x+2$, $x=2$, $x=4$.
56. $y=x^3+1$, $y=9$.
57. $y=x^2+1$, $y=26$.
58. $y=2x$, $x=1$, $x=2$.
59. $y=x^3+1$, $y=28$.
60. $y=x^2+2$, $y=27$.

Решение типового примера

Вычислить площадь фигуры, ограниченную заданными линиями:

$y = x^3 + 2, \quad y = 29$



Найдем абсциссы точек пересечения заданных линий

$$\begin{cases} y = x^3+2 \\ y = 29 \end{cases}; \begin{cases} x^3+2 = 29 \\ y = 29 \end{cases}; \begin{cases} x^3 = 27 \\ y = 29 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 29 \end{cases}$$

Площадь фигуры $S_{фиг} = S_{прям} - S_{кр.тр}$

$S_{прям} = 3 \times 29 = 87(ед^2)$

$S_{кр.тр} = \int_0^3 (x^3 + 2)dx = \left(\frac{x^4}{4} + 2x\right)\Big|_0^3 = \frac{3^4}{4} + 2 \times 3 - \frac{0^4}{4} - 2 \times 0 = \frac{81}{4} + 6 = 20\frac{1}{4}(ед^2)$

$S_{фиг} = 87 - 26\frac{1}{4} = 60\frac{3}{4}(ед^2)$

Ответ: площадь фигуры составляет $60\frac{3}{4}(ед^2)$

Используемые формулы: Ньютона-Лейбница

$$S_{кр.тр} = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int cdx = cx + C$$

Задание № 6

В задачах 61-70 найти частное решение дифференциального уравнения первого порядка:

61. $\begin{cases} \dfrac{dy}{4x^3} = \dfrac{dx}{y}; \\ y(0) = 1 \end{cases}$

62. $\begin{cases} \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dx}{y}; \\ y(-2) = 4 \end{cases}$

63. $\begin{cases} \dfrac{dy}{x^2} = \dfrac{dx}{y^2}; \\ y(0) = 2 \end{cases}$

64. $\begin{cases} dy = 3x^2 dx; \\ y(2) = 4 \end{cases}$

65. $\begin{cases} ydy = (x-1)dx; \\ y(0) = 4 \end{cases}$

66. $\begin{cases} \dfrac{dy}{x^2} = \dfrac{dx}{y}; \\ y(0) = 2 \end{cases}$

67. $\begin{cases} \dfrac{dy}{2x} = dx; \\ y(1) = 6 \end{cases}$

68. $\begin{cases} ydy = (x+2)dx; \\ y(2) = 8 \end{cases}$

69. $\begin{cases} \dfrac{dy}{2x} = \dfrac{dx}{2y} ; \\ y(2) = 4 \end{cases}$

70. $\begin{cases} dy = 4x^3 dx \\ y(1) = 9 \end{cases}$

Решение типового примера

Найти частное решение дифференцированного уравнения первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{2x^2} = \dfrac{dx}{y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Это дифференцированное уравнение с разделяющимися переменными. Производим разделение переменных: $ydy = 2x^2 dx$

Интегрируя обе части равенства, получаем: $\int ydy = \int 2x^2 dx$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{2x^3}{3} + C$$

$$y^2 = \frac{4}{3}x^3 + 2C$$

Используя начальное условие, вычислим, соответствующее ему значение постоянное С: $\frac{4}{3} \times 0^3 + 2C = 2^2$; $2C = 4$; $C = 2$

Поэтому частное решение исходного дифференцированного уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию, имеет вид: $y^2 = \frac{4}{3}x^3 + 4$

Задание №7

Задание: Выполнить действия			
(1+3i)+(-3+i)	(5-3i)×(2-5i)	(5+4i)-(-3+4i)	(2+3i)/(2-3i)
(-4+3i)+(4-3i)	(3+5i)×(2+3i)	(4+2i)-(-1+2i)	(5-4i)/(-3+2i)
(-2+5i)+(2-5i)	(3-4i)×(-7+3i)	(7-2i)-(-4+3i)	(-5+2i)/(6-7i)
(3-4i)+(-3+4i)	(6+7i)×(-5+2i)	(-9+4i)-(3+5i)	(1+8i)/(-3+i)
(7-2i)+(-7+3i)	(1+8i)×(-9+4i)	(2+3i)-(-3+i)	(-8+i)/(7-2i)
(-5+2i)+(5-2i)	(3+4i)×(-8+i)	(-3+4i)-(6+7i)	(6-7i)/(-1+2i)
(-6+7i)+(6-7i)	(7-2i)×(-3+i)	(3+5i)-(-9+4i)	(3+4i)/(-5+2i)
(1+8i)+(-8+i)	(2+3i)×(6-7i)	(-5+2i)-(3+4i)	(-9+4i)/(5-7i)
(-9+4i)+(9-4i)	(-5+2i)×(7-2i)	(-4+3i)-(2+3i)	(6+7i)/(1+8i)
(8-5i)+(-8+5i)	(-1+2i)×(6+7i)	(7-5i)-(-8+i)	(3+5i)/(-4+3i)

Задание №8

Задание:

Решить задачу

В партии из 8 деталей имеется 6 стандартных. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад деталей ровно три стандартных.

В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.

В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

В урне 5 белых и 4 черных шаров. Из урны наугад вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров будет 2 белых.

В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наугад деталей ровно 4 стандартных.

В группе 16 студентов, среди которых 10 отличников. По списку отобраны 12 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 6 отличников

В цехе работают 7 мужчин и 5 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны семь8 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 4 женщины.

В урне 7 белых и 5 черных шаров. Из урны наугад вынимают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров будет 4 белых.

В партии из 12 деталей имеется 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди 7 взятых наугад деталей ровно 5 стандартных.

В группе 14 студентов, среди которых 9 отличников. По списку отобраны 11 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников

Задание: Найти произведение матриц AB = C, если A, B даны:
$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 10 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ -7 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} 18 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 13 \\ 8 & 0 & 15 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 15 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} 8 & -11 & 12 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -1 & 12 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$